Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebra II
Blatt 5

Abgabe von: Mein Name
Tutor: Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 9 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 5.1 **[3 + 1 Punkte]**

Sei R ein faktorieller Ring, $K := \operatorname{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R, L/K eine Körpererweiterung von K und $\alpha \in L$ algebraisch über K.

(a) Zeigen Sie, dass α genau dann ganz über R ist, wenn das Minimalpolynom von α über K bereits in $R[X]$ liegt.

(b) Folgern Sie, dass ein $\beta \in K$ genau dann ganz über R ist, wenn $\beta \in R$ gilt.

Lösung:

Aufgabe 5.2 **[1+1+2 Punkte]**

Sei B ein kommutativer Ring mit 1, A ein Unterring von B sodass B ganz über A ist, $\mathfrak{b}$ ein Ideal von B und $\mathfrak{a} := \mathfrak{b} \cap A$. Bemerken Sie zunächst, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A ist.

(a) Zeigen Sie, dass $B/\mathfrak{b}$ ganz über $A/\mathfrak{a}$ ist.

Sei nun S eine multiplikative Teilmenge von A mit $0 \notin S$.

(b) Zeigen Sie, dass $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$ ist.

Seien nun noch A, B integer und A ganz abgeschlossen.

(c) Zeigen Sie, dass $S^{-1}A$ ganz abgeschlossen ist.

Lösung:

Aufgabe 5.3 **[2+2 Punkte]**

Sei B ein Integritätsbereich und A ein integer Unterring von B sodass B ganz über A ist.

(a) Beweisen Sie, dass B genau dann ein Körper ist, wenn A ein Körper ist.

Sei nun $\mathfrak{q}$ ein Primideal von B und $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap A$. Bemerken Sie zunächst, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{q}$ genau dann ein maximales Ideal von B ist, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von A ist.

Lösung:

Definition
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ein *symmetrisches Polynom* $p \in R[X_1, \dots, X_n]$ erfüllt für jede Permutationen $\sigma \in S_n$ die Bedingung $p\left(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}\right) = p(X_1, \dots, X_n)$.

(ii) Die *elementarsymmetrische Polynom* von $R[X_1, \dots, X_n]$ entsprechen

$$s_0(X_1, \dots, X_n) :\equiv 1$$

und

$$s_k(X_1, \dots, X_n) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \cdot \dots \cdot X_{i_k} \in R[X_1, \dots, X_n]$$

mit $k \in \{1, \dots, n\}$.

Aufgabe 5.4* **[1+2+1 Punkte]**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass jedes elementarsymmetrische Polynom von $R[X_1, \dots, X_n]$ ein symmetrisches Polynom ist.

Sei nun R insbesondere ein Integritätsbereich, $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R, $f \in R[X]$ ein normiertes Polynom, L/K ein Zerfällungskörper von f und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in L$ mit $m \in \mathbb{N}_{\leq deg(f)}$ alle Nullstellen von f.

(b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten von f bis auf Vorzeichen durch elementarsymmetrische Polynome von $R[X_1, \dots, X_m]$ in den Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in L$ von f gegeben sind.

(c) Erläutern Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage aus Teilaufgabe (b) anhand des Polynoms $f(X) = X^4 + 2X^3 - 16X^2 - 2X + 15 \in \mathbb{Z}[X]$.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 27. Mai 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.